සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.

---

1. බල පද්ධතියක් බල තුනකින් සමන්විත වෙයි : ඒවා නම් $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත A ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත B ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ සහ $\mathbf{R} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ යන බල වේ. $\mathbf{P}$ සහ $\mathbf{Q}$ හි ක්‍රියා රේඛා ඡේදනය වන පරිදි α හි අගය සොයා, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය නිර්ණය කරන්න.

පද්ධතිය සමතුලිත වෙයි නම්, හෝ යුග්මයකට තුල්‍ය වෙයි නම් හෝ, L, M හා N හි අගයයන් සොයන්න.

(i) සමතුලිත අවස්ථාවේ දී, $\mathbf{R}$ හි ක්‍රියා රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය, λ පරාමිතියක් වූ

$$\mathbf{r} = (5 - 7\lambda)\,\mathbf{i} + (3 + \lambda)\,\mathbf{j} + 2(\lambda - 1)\,\mathbf{k}$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ii) යුග්මයකට ඌනනය වීමේ දී, $\mathbf{R}$ බලය O මූලය ඔස්සේ ක්‍රියාකරන බවත් දී ඇත්නම්, යුග්මයේ විශාලත්වය සහ එහි අක්ෂයට සමාන්තර ඒකක දෛශිකයක් සොයන්න.

[මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ මගින් Ox, Oy, Oz පුරත් කාටීසිය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික පිළිවෙළින් දක්වයි.]

2. අරය a වූ අර්ධ-වෘත්තාකාර තැටියක් ඝනත්වය ρ වූ සමජාතීය ද්‍රවයක සිරස් ව ගිල්වා ඇත්තේ එහි පර්යන්ත විෂ්කම්භය ද්‍රවයේ නිදහස් පෘෂ්ඨයේ තිබෙන පරිදි ය. තැටිය මත ද්‍රව තෙරපුම, අනුකලනය මගින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, සොයා තැටිය මත පීඩන කේන්ද්‍රය, නිදහස් පෘෂ්ඨයෙන් $\dfrac{3\pi a}{16}$ දුරක් පහළින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

දිග h සහ ආධාරකයේ අරය a වූ කුහර සෘජු වෘත්ත කේතුවක් එහි අක්ෂය තිරස් ව තබා, එම ද්‍රවයෙන් අර්ධ වශයෙන් පුරවා ඇත. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත ද්‍රව තෙරපුමෙහි ක්‍රියා රේඛාව

(i) යටිඅත් සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\dfrac{4a}{\pi h}\right)$ කෝණයක් සාදන බවත්,

(ii) ශීර්ෂයේ සිට $\dfrac{3}{4}\left(h + \dfrac{a^2}{h}\right)$ දුරක දී කේතුවේ අක්ෂය සමග හමුවන බවත්

පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. තලයක චලනය වන P අංශුවක, O මූලයක් සහ Ox ආරම්භක රේඛාව අනුබද්ධයෙන් ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r, θ) වෙයි. P හි ත්වරණයේ අරීය සංරචකය $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ආකාරයෙන් ලබාගන්න.

ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m, M වූ P, Q අංශු දෙකක් ස්වභාවික දිග a වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවකින් සම්බන්ධ කරනු ලැබ, කුඩා සුමට OA නලයක් තුළ තබා ඇත. නලය O හරහා යන අචල සිරස් අක්ෂයක් වටා නියත ω කෝණික ප්‍රවේගයකින් තිරස් තලයක භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. ආරම්භයේ දී අංශූන් නලයට සාපේක්ෂ ව නිශ්චලතාවයේ ඇති අතර තන්තුව යම්තම් නොබුරුල් ය. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $\dfrac{2\,mMa\omega^2}{m + M}$ වෙයි.

t කාලයේ දී $OP = r$ ද, $OQ = r + s$ ද, නම්, එක් එක් අංශුව සඳහා අරීය දිශාවට චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න ;

මෙහි $s\,(> a)$ යනු තන්තුවේ දිග වේ. $\ddot{s} + \omega^2 (s - 2a) = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

$s = 2a + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ වන පරිදි A සහ B නියත සොයන්න.

ඒ නයින් තන්තුවේ ආතතිය, t කාලයෙහි ශ්‍රිතයක් ලෙස සොයන්න.

4. ස්කන්ධය M වූ සුමට කුඤ්ඤයකට සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වීමට නිදහස ඇති අතර එය මේසය මත නිශ්චලව ඇත. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ව වැටෙමින්, කුඤ්ඤයේ තිරසට $\dfrac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත සුමට මුහුණතක P ලක්ෂ්‍යයක දී ඝට්ටනය වෙයි. අංශුව සහ කුඤ්ඤය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. ගැටුමෙන් පසු කුඤ්ඤයේ ප්‍රවේගය $\dfrac{(1 + e)\,mu}{2M + m}$ බව සාධනය කරන්න.

මෙම ඇල මුහුණත අවශ්‍ය තරම් දිගට ඇත්නම්, අංශුව $T = \dfrac{2eu}{g}$ කාලයකට පසුව එය මත නැවත Q ලක්ෂ්‍යයක දී ඝට්ටනය වන බවත්

$$PQ = \frac{2\sqrt{2}\,e\,(1 + e)\,(M + m)u^2}{(2M + m)\,g} \text{ බවත්}$$

සාධනය කරන්න.

T කාල ප්‍රාන්තරයේ දී කුඤ්ඤය ගමන් කරන දුර කුමක් ද?

5. වේගය v වන විට, ඒකක ස්කන්ධයකට ප්‍රතිරෝධය kv^2 වූ මාධ්‍යයක් තුළ අංශුවක් නිශ්චලතාවයේ සිට ගුරුත්වය යටතේ වැටෙයි ; මෙහි k නියතයකි. v වේගයක් ලබා ගැනීමට එය වැටිය යුතු දුර

$y = \dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{g}{g - kv^2}\right)$ බව ද, $y \longrightarrow \infty$ විට v වේගය, $V = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$ සීමාකාරී අගය කරා ළඟාවන බව ද පෙන්වන්න.

අංශුව එම මාධ්‍යයේ ම සිරස් ව ඉහළට, ඉහත සීමාකාරී V වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබුවේ නම්, එය ආපසු ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟාවීමේ දී එහි වේගය $\dfrac{V}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

6. ස්කන්ධය M සහ අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක කේන්ද්‍රය හරහා යන, තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය, අනුකලනයෙන් සොයන්න. එහි පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන සමාන්තර අක්ෂයක් වටා තැටියේ අවස්ථිති ඝූර්ණය, ඔබ භාවිත කරන යම් ප්‍රමේයයක් ඇත්නම් එය ප්‍රකාශ කරමින්, $\frac{3Ma^2}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

තැටිය එහි තලය සිරස් ව ඇතිව, රළු තිරස් මේසයක් මත (ලිස්සීමෙන් තොරව) පෙරළෙන අතර, තැටියේ කේන්ද්‍රයේ ප්‍රවේගය V වෙයි. එහි උච්චතම A ලක්ෂ්‍යය ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට පමුණුවනු ලබන්නේ දුමට අචල කුරකිනි. තැටිය A වටා භ්‍රමණය වීමට ආරම්භ කරන කෝණික වේගය $\frac{V}{3a}$ බව පෙන්වා, මෙම භ්‍රමණයේ අත සොයන්න.

ආවේගී ක්‍රියාවට මොහොතකට පසු තැටියේ ඉතිරිවන චාලක ශක්තිය සොයා, ඒ නයින්, තැටිය පූර්ණ පරිභ්‍රමණ ඇතිකරන්නේ $V^2 > 24\,ga$ නම් බව පෙන්වන්න.

තැටියේ කේන්ද්‍රය නැවත A ට සිරස් ව පහළින් තිබෙන විට, A හි කුර ඉවත් කළේ නම් කුමක් සිදුවෙයි ද?

7. X යනු, $P[X=x]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ මගින් දී ඇති පොයිසොන් ව්‍යාප්තිය සහිත සසම්භාවී විචල්‍යයක් යයි ගනිමු.

$x=1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $P[X=x]=\frac{\lambda}{x}\,P[X=x-1]$ බව පෙන්වන්න.

λ නිඛිලයක් වන විට X සඳහා වඩාත්ම සම්භාවී අගයයන් දෙකක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න. λ නිඛිලයක් නොවන විට X හි වඩාත්ම සම්භාවී අගය සොයන්න.

එක්තරා වෛද්‍යවරයෙකුගේ සායනයකට, පෙරවරු 8 සිට මිනිත්තු පහකට එක් අයෙකු බැගින් වන සාමාන්‍යයකින් රෝගීන් ස්වායත්ත හා සසම්භාවී ලෙස පැමිණේ.

(i) වෛද්‍යවරයා පෙරවරු 9 ට පැමිණෙන විට සායනයේ රැඳී සිටින රෝගීන් සංඛ්‍යාවේ වඩාත්ම සම්භාවී අගයයන් සොයන්න.

(ii) වෛද්‍යවරයා පැමිණෙන විට සායනයේ රැඳීසිටින රෝගීන් සංඛ්‍යාවේ එකම වඩාත් ම සම්භාවී අගය 5 නම් සායනය වෙත වෛද්‍යවරයා කවර වේලාවක පැමිණිය යුතුව තිබුණේ දැයි සොයන්න.

8. එක්තරා කාන්තාවක් දුරකථනයෙන් අමතන කාලය වන මිනිත්තු X,

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{5}}, & x \geq 0 \quad \text{සඳහා ;} \\ 0\ , & x < 0 \quad \text{සඳහා} \end{cases}$$

ආකාරයේ $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයක් සහිත සසම්භාවී විචල්‍යයක් යයි සොයාගෙන ඇත.

(අ) $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයක් වන අයුරින් k හි අගය සොයන්න.

(ආ) කාන්තාව දුරකථන ඇමතුමක් සඳහා ගතකරන කාලයේ මධ්‍යන්‍යය සොයා එහි සම්මත අපගමනය මිනිත්තු 5 ක් බව පෙන්වන්න.

[n නිර්ඍණ නිඛිලයක් විට $\int_0^{\infty} y^n e^{-y}\,dy = n!$ බව උපකල්පනය කළ හැකිය.]

(ඇ) ඕනෑම u තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා $A(u)$, ඇමතුමක් මිනිත්තු u ට වඩා දීර්ඝ වීමේ සිද්ධිය දක්වයි යයි ගනිමු. $P\{A(u)\}$ සොයන්න. $u>0$ හා $v>0$ සඳහා $P\{A(u+v)|A(u)\} = P\{A(v)\}$ බව පෙන්වන්න.

(i) ඇය ඇමතුමක් සඳහා ගතකරන කාලය මිනිත්තු 10 කට වඩා දීර්ඝ වීමේ සම්භාවිතාව e ඇසුරෙන් සොයන්න.

(ii) ඇය දුරකථනයෙන් මිනිත්තු 10 ක් දැනටමත් කථා කර ඇතැයි දී ඇත්නම් ඇගේ ඇමතුම මිනිත්තු 20 කට වඩා දීර්ඝ වීමේ සම්භාවිතාව e ඇසුරෙන් සොයන්න.

9. X යනු මධ්‍යන්‍යය μ සහ විචලතාව σ^2 සහිත සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක් නම් $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ සසම්භාවී විචල්‍යයේ මධ්‍යන්‍යය 0 ද, විචලතාව 1 ද වන බව පෙන්වන්න.

ගෙන යා හැකි රේඩියෝවක භාවිත කෙරෙන බැටරියක ආයුකාලය, මධ්‍යන්‍යය පැය 150 ක් ද, සම්මත අපගමනය පැය 30 ක් ද, සහිත ප්‍රමත ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි.

(i) ආයුකාලය පැය 140 සහ පැය 170 අතර වූ බැටරි වල ප්‍රතිශතය ගණනය කරන්න.

(ii) බැටරි ආයුකාලවලින් 75% ක් පිහිටන, මධ්‍යන්‍යය වටා සමමිතික, පරාසය ගණනය කරන්න.

(iii) රේඩියෝවක් ක්‍රියාත්මක වන්නේ මෙවැනි බැටරි හතරකින් නම් සහ ඒවා සියල්ල ම සක්‍රිය විය යුතු නම් රේඩියෝව, අලුත් බැටරි හතරක් ඇතුළු කිරීමෙන් පසුව, අඩුතම වශයෙන් පැය 125 ක් වත් ක්‍රියාත්මක වීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.